

# La luce ed i neutrini

un viaggio a grande velocità nel mondo delle particelle elementari

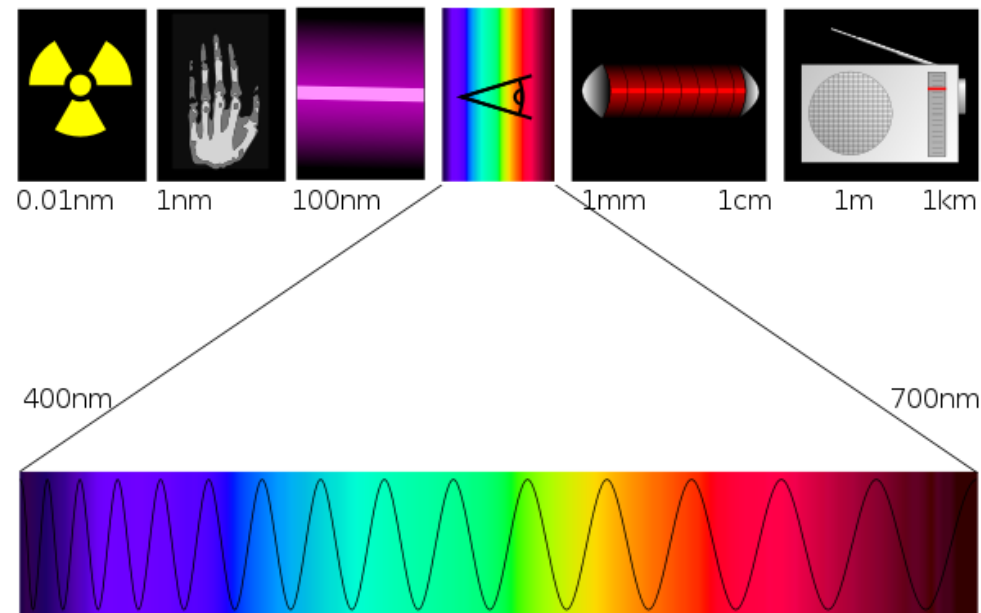
Francesco Vissani

INFN, Laboratori del Gran Sasso

*Discutiamo la luce dal punto di vista della fisica moderna, approfittando per introdurre le idee di Einstein. Parliamo della particella nota come neutrino e del perchè i fisici la considerano interessante. Commentiamo sugli studi della loro velocità, che hanno creato tanto clamore nei mesi scorsi.*

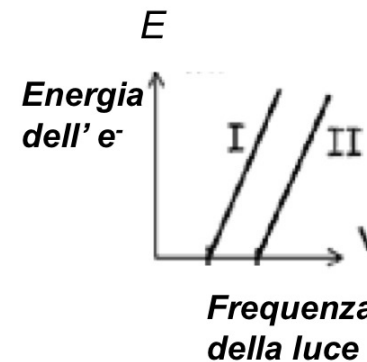
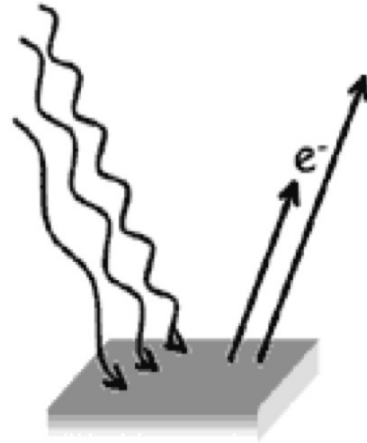
LA LUCE  
ovvero  
I FOTONI

Ai giorni nostri, quando un fisico parla di “luce”, di solito si riferisce per estensione di termini a un qualsiasi tipo di radiazione elettromagnetica.



Inoltre, i fisici tengono a mente il fatto, che si considera assodato, che la luce è composta da certe particelle elementari, dette **fotoni**. Parleremo di questo, ed in particolare della velocità della luce – o come direbbe un fisico, dei fotoni.

Estrazione di  $e^-$  per mezzo di luce su metalli fotosensibili (effetto foto-elettrico).



Relazione tra la frequenza della luce,  $\nu$ , e l'energia cinetica dell' $e^-$  estratto,  $E$ , per due metalli diversi.

L'estrazione avviene solo se si supera una certa energia potenziale  $V > 0$  che dipende dal metallo,

$$E = E_{\text{luce}} - V \quad [\text{se } E_{\text{luce}} > V]$$

Siccome  $dE/d\nu = \text{costante}$ , tutto porta a credere che

$$E_{\text{luce}} = h \nu$$

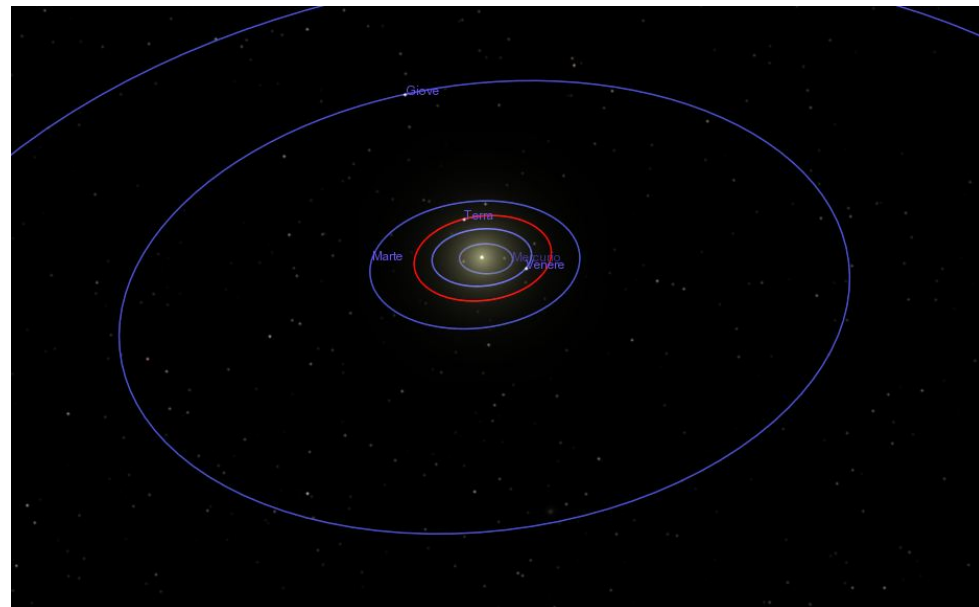
La costante di proporzionalità è quella introdotta da Planck (*Einstein 1905*).

# LA VELOCITÀ DELLA LUCE

## Il primo indizio

Misurando la durata delle orbite del satellite più interno di Giove, detto **Io**, l'astronomo danese Römer ricevette una sorpresa.

Infatti, durante una metà dell'anno terrestre, *le orbite sono più veloci della media*, durante l'altra, più lente. Più precisamente, nelle prime 100 orbite circa, **Io** guadagna quasi 20 minuti sulla tabella di marcia; nelle successive orbite, li perde.



Come si spiega? Come può l'orbita terrestre influenzare quella di **Io**?

La spiegazione proposta era questa; durante la prima parte dell'anno, la Terra va incontro ad **Io**, e la luce deve percorrere meno spazio; durante la seconda, se ne allontana, la luce impiega di più. Quantitativamente

$$\text{velocità} = \frac{\text{spazio}}{\text{tempo}} = \frac{2 \times 150 \text{ milioni di } km}{16 \text{ min}} = 300 \text{ mila } \frac{km}{sec}$$

Questa fu la prima evidenza che la velocità della luce non fosse infinita.

*Römer non fece i calcoli precisi; questa spiegazione fu contestata; chi lo contestò sostiene di avere misurato la velocità per primo; ecc. Ma questi dettagli li lascio volentieri agli storici, e comunque, nel 1600 i Nobel non venivano ancora assegnati.*

## La velocità della luce nelle equazioni di Maxwell

Le equazioni di Maxwell determinano il campo elettrico  $E$  e quello magnetico, visti come funzioni del tempo  $t$  e delle tre coordinate dello spazio  $x, y, z$ . Una configurazione importante è descritta da una funzione di una variabile

$$E(x, y, z, t) = f(x - c \cdot t)$$

Essa rappresenta un' **onda** che si propaga, con velocità  $c$ , lungo l'asse delle  $x$ .

Potete controllare che questa funzione soddisfa l'*equazione differenziale*

$$\left( \frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2}{dz^2} - \frac{1}{c^2} \frac{d^2}{dt^2} \right) E(x, y, z, t) = 0$$

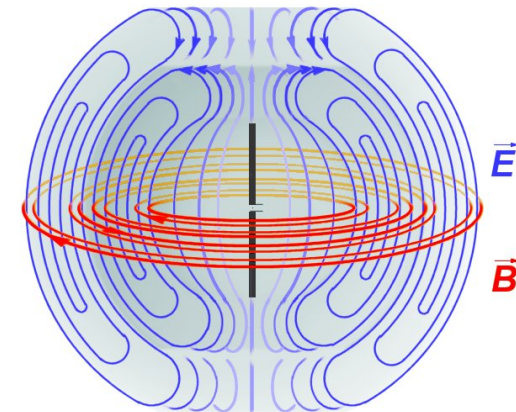
che deriva dalle equazioni di Maxwell, lontano da cariche elettriche e correnti.

**Nelle equazioni di Maxwell la velocità della luce è una costante.**



Quale è il legame tra i concetti di **onda** e di **velocità della luce**?  
 Se sposto improvvisamente una carica, modifico il campo nelle sue vicinanze, ma non quello lontano. L'onda serve proprio per trasportare sempre più lontano l'informazione di quello che è successo.

Le trasmissioni radio sono basate su considerazioni del genere. Quella mostrata qua accanto è l'onda che irradia da una carica che si muove su e giù (dipolo).

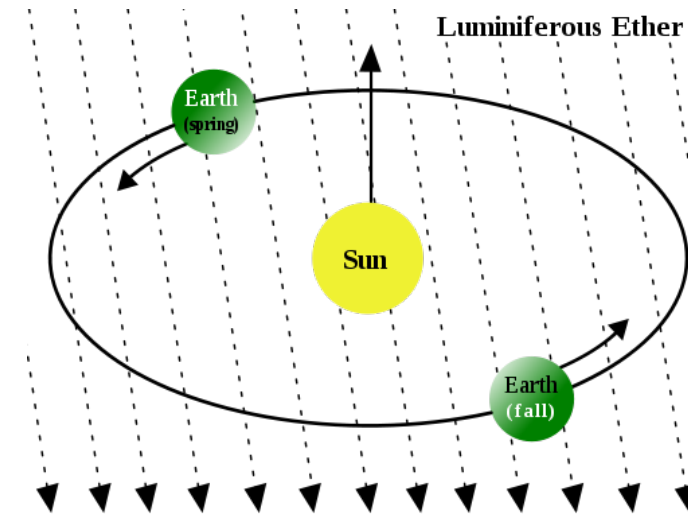
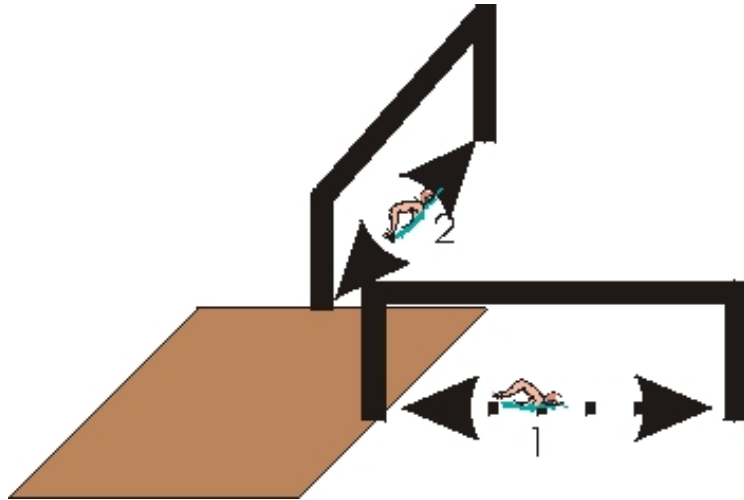


Da questo punto di vista, è naturale identificare queste onde con quelle radio, con la luce, con i raggi X ecc. La matematica diventa fisica!

## L'etere luminifero

Chi venne dopo Maxwell, non riusciva ad immaginare che un'onda luminosa potesse propagarsi nel vuoto. Si pensava che le onde di luce increspavano una misteriosa sostanza detta "etere luminifero" che permeava tutto lo spazio, un po' come il suono si propaga nell'aria o come le onde sulla superficie dell'acqua.

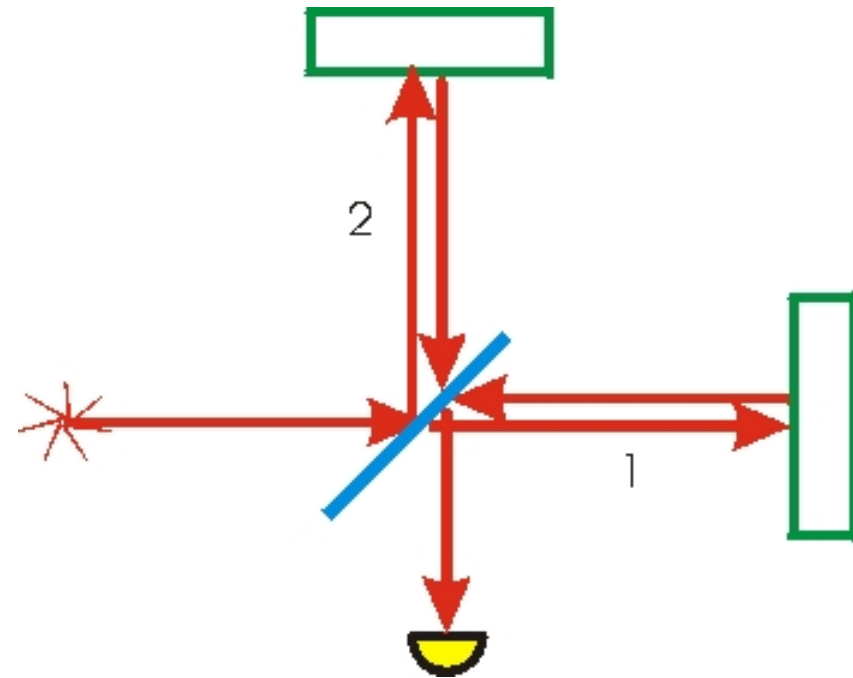




Un nuotatore impiega più tempo a nuotare prima a favore poi contro corrente, che avanti e indietro in direzione trasversa alla corrente. Si pensò allora di verificare se la luce si conformasse a questa predizione.

(Notare che nelle equazioni di Maxwell questo non c'è scritto che la luce debba essere trascinata dall'etere; lì c'è solo una costante, la velocità della luce).

*Quando si provò a vedere se la velocità della luce si componeva con il moto della Terra, non si trovò nessun effetto. I tempi di transito erano gli stessi.*



Chi voleva salvare l'etere suggerì che *oltre* l'effetto di trascinamento, ci fosse una contrazione dei corpi nella direzione del moto: un po' come  $1 - 1 = 0$ .

Einstein rifiutava l'idea dell'etere e trovava ovvio che non ci fosse alcun effetto. Ma si trovò a meditare sull'idea che la velocità della luce fosse costante.

## Drammatiche conseguenze sulla natura del tempo

Si voleva che le equazioni di Maxwell e le loro soluzioni fossero sempre le stesse, anche per un sistema in moto.

Ma allora bisognava modificare le leggi di trasformazione

$$\begin{cases} x' = x + v \cdot t \\ t' = t \end{cases}$$

che portano alla conclusione che la velocità della luce cambi, come si vede calcolando nelle nuove coordinate il campo dell'**onda**

$$E(x, y, z, t) = f(x - c \cdot t)$$

Non c'era scelta, il tempo  $t$  non poteva essere universale, e doveva dipendere dallo stato di moto!

*Lo spazio e tempo si intrecciano tra di loro, perchè la velocità della luce resti costante. È il punto di partenza della relatività di Einstein.*

COME SI  
CAPISCE  $E = Mc^2$

## Energia ed impulso della luce

Le equazioni di Maxwell prevedono che la luce abbia energia ed anche impulso. Inoltre, si predice la semplice relazione

$$\text{Energia} = \text{Impulso} \times c$$

ben diversa da quella nota dalle scuole superiori, che riguarda particelle lente, dotate di massa:

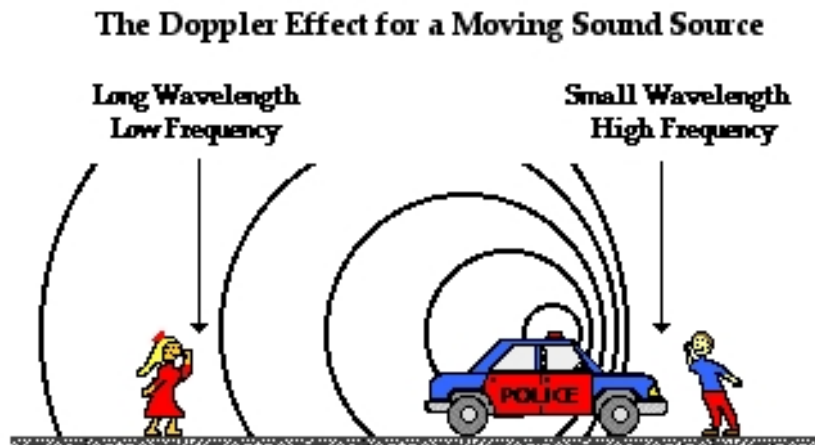
$$\text{Energia} = \frac{M v^2}{2}, \quad \text{Impulso} = M v \quad \Rightarrow \quad \text{Energia} = \frac{\text{Impulso}^2}{2 M}$$

Ma è rassicurante che le dimensioni sono giuste (verificarlo); poi è piuttosto facile convincersene usando le relazioni della meccanica quantistica come  $E = h\nu$ .

## L'effetto Doppler vale anche per la luce

Se una sorgente di luce si **avvicina** a (o si **allontana** da) noi, la velocità è sempre quella; ma la frequenza  $\nu$ , l'energia e anche l'impulso della luce, si alzano (o abbassano) del fattore moltiplicativo

$$1 + \frac{v}{c} \quad \left( \text{oppure } 1 - \frac{v}{c} \right)$$



Vale il contrario per le lunghezze d'onda e per il periodo dell'onda.



## La dimostrazione del 1907

Consideriamo un oggetto di massa  $M$  che emette due raggi di luce in direzioni opposte con energia  $E/2$  ciascuno. L'impulso totale resta nullo, perchè gli impulsi dei due raggi  $p = E/(2c)$  sono uguali ed opposti.

Se questo avviene mentre l'oggetto si muove con velocità  $v$ , i raggi di luce subiscono l'effetto Doppler. La somma dei loro impulsi non sarà più zero

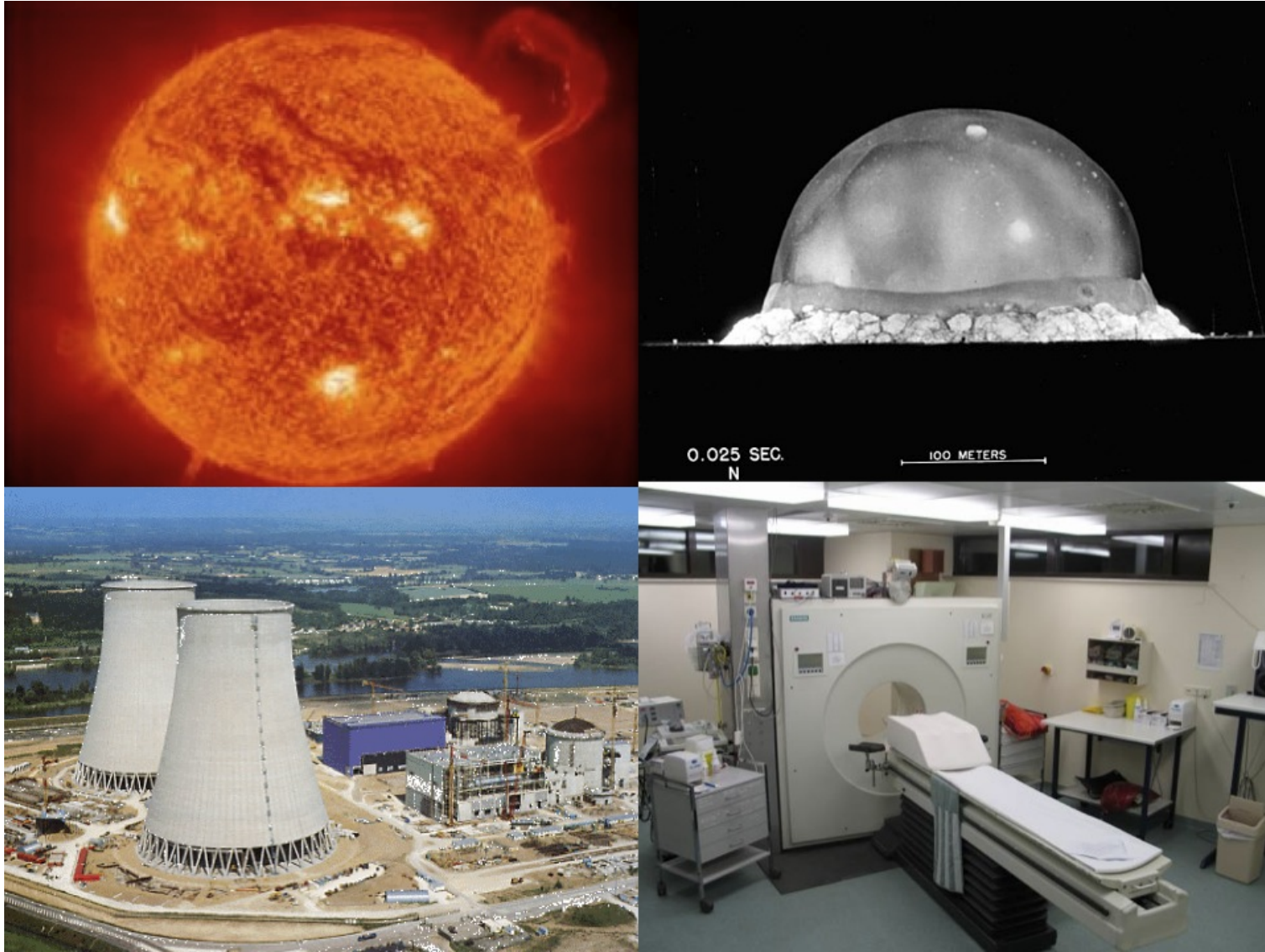
$$-\frac{E}{2c} \left(1 - \frac{v}{c}\right) + \frac{E}{2c} \left(1 + \frac{v}{c}\right) = \frac{E v}{c^2}$$

Siccome l'oggetto con massa ha velocità  $= v$  sia prima che dopo, per conservare l'impulso siamo costretti ad ammettere che la sua massa cambia:

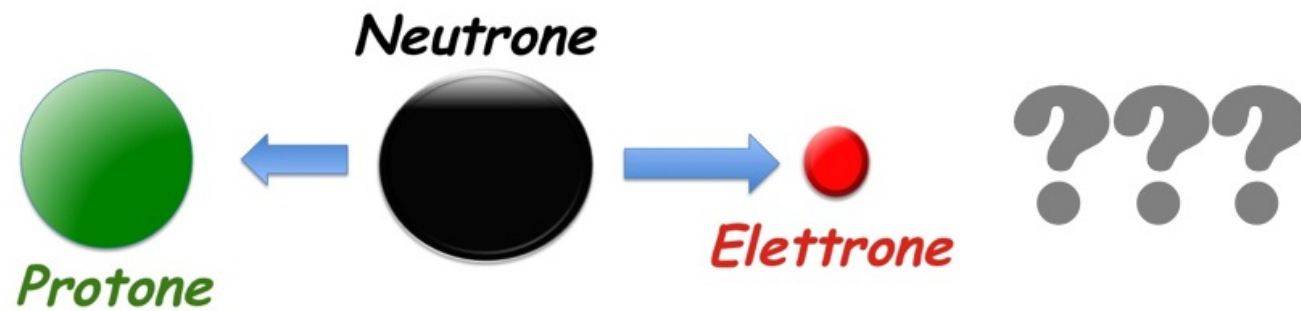
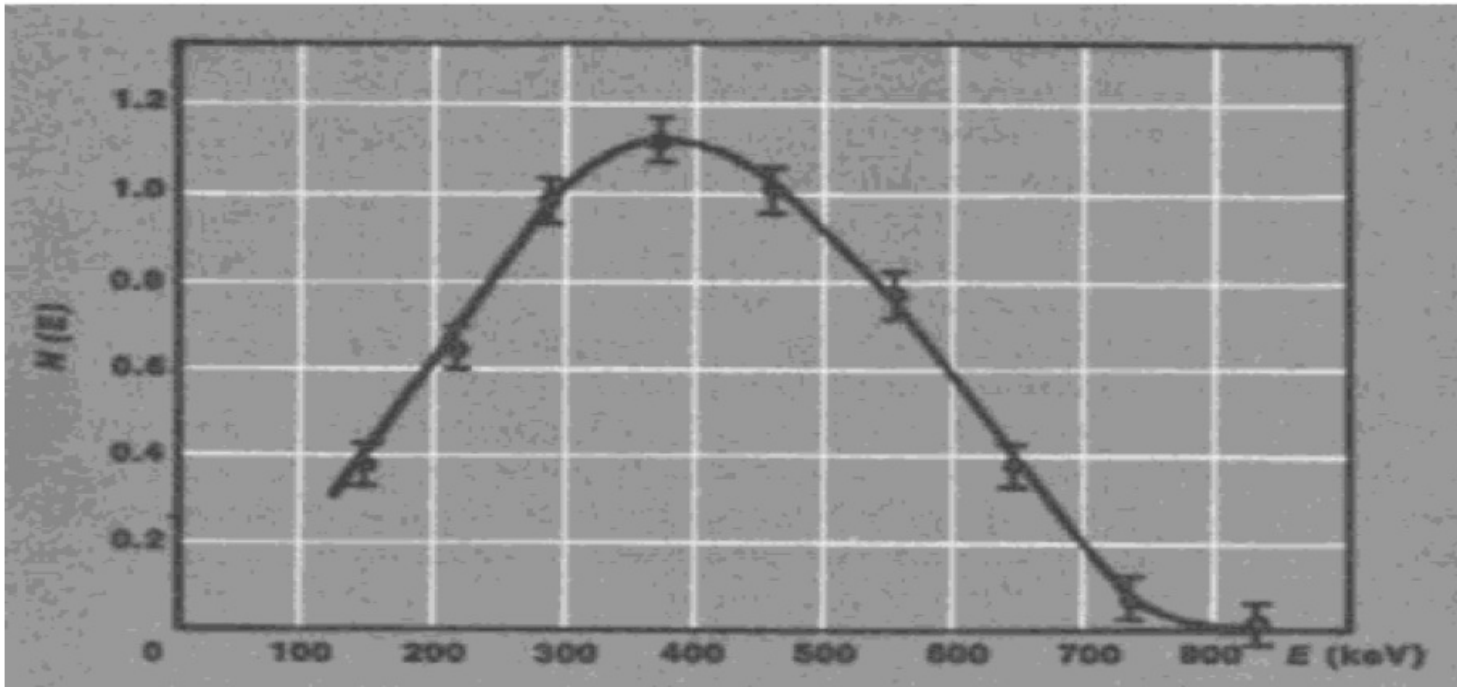
$$Mv = M'v + \frac{E v}{c^2} = \left(M' + \frac{E}{c^2}\right) v$$

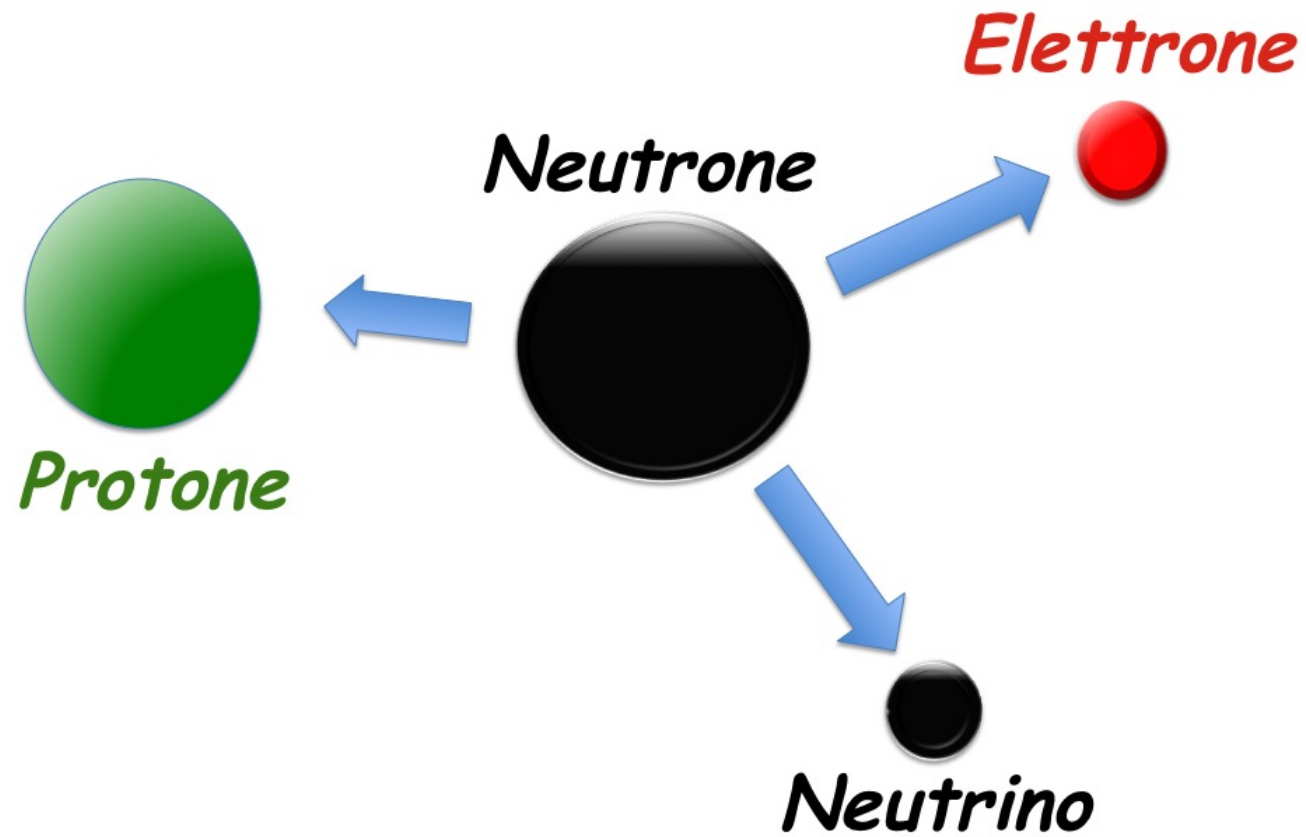
L'emissione di energia è accompagnata da una diminuzione di massa.

*All'epoca, A. Einstein aveva 28 anni.*



# I NEUTRINI

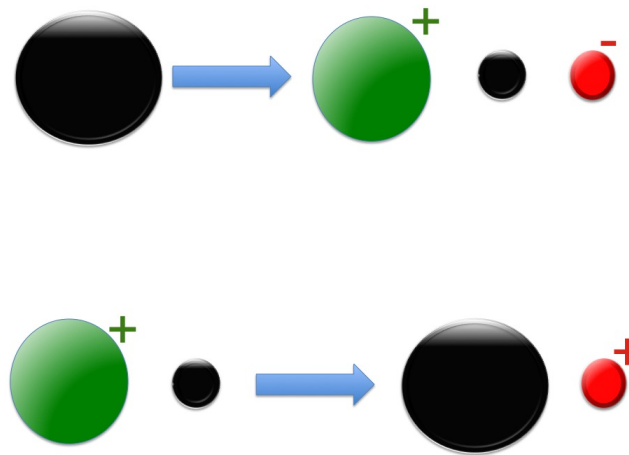




Introducendo una particella fantasma Pauli salva la conservazione della energia.

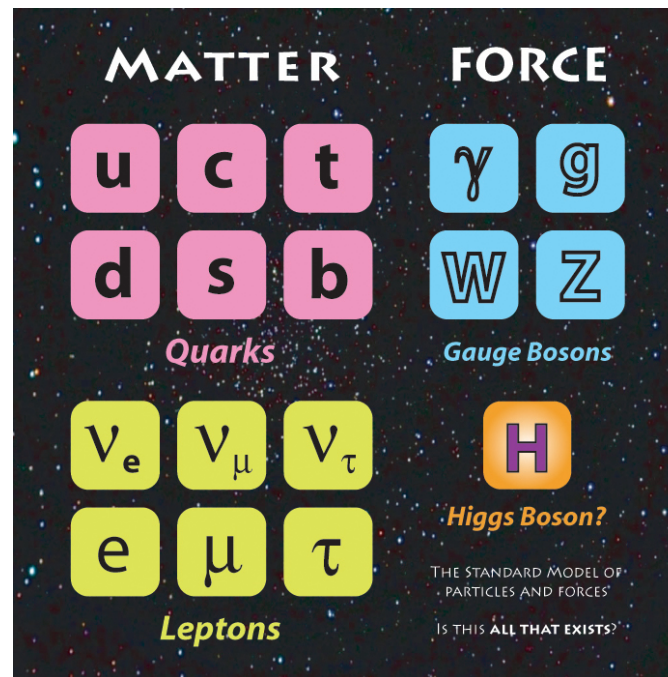
Fermi descrisse la teoria che ancora oggi usiamo per descrivere le interazioni dei neutrini. Il suo lavoro, rifiutato dalla celebre rivista Nature, venne pubblicato altrove.

Bethe e Peierls considerarono la relazione tra decadimento con emissione di elettroni ed interazione di neutrini:



Conclusero che l'interazione era così debole che i neutrini **non sarebbero mai stati visti**, e Nature ospitò le loro tesi. Ma dopo meno di 20 anni i neutrini furono visti...

Oggi i neutrini sono annoverati tra le particelle elementari; appartengono alla classe dei 'leptoni', quelle che non hanno interazioni forti con il nucleo atomico.



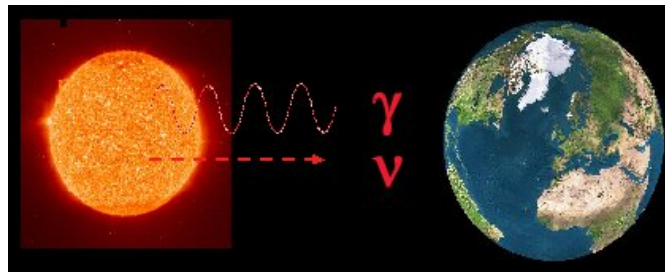
Ci sono 3 tipi di particelle di materia, ed in particolare, tre tipi di neutrini.

# PERCHÈ SONO INTERESSANTI (qualche esempio)



## Neutrini dal sole

I neutrini sono la prova che il sole funziona come un reattore nucleare, che converte in luce (e neutrini) l'energia delle trasformazioni nucleari.



I neutrini permettono di osservare il centro del sole, dove avvengono le reazioni.

*L'Italia è all'avanguardia in queste ricerche; al momento, l'esperimento più avanzato è Borexino, presso i laboratori del Gran Sasso, che sta tentando per la prima volta di osservare tutte le reazioni che avvengono nel sole.*

# Neutrini da collassi stellari

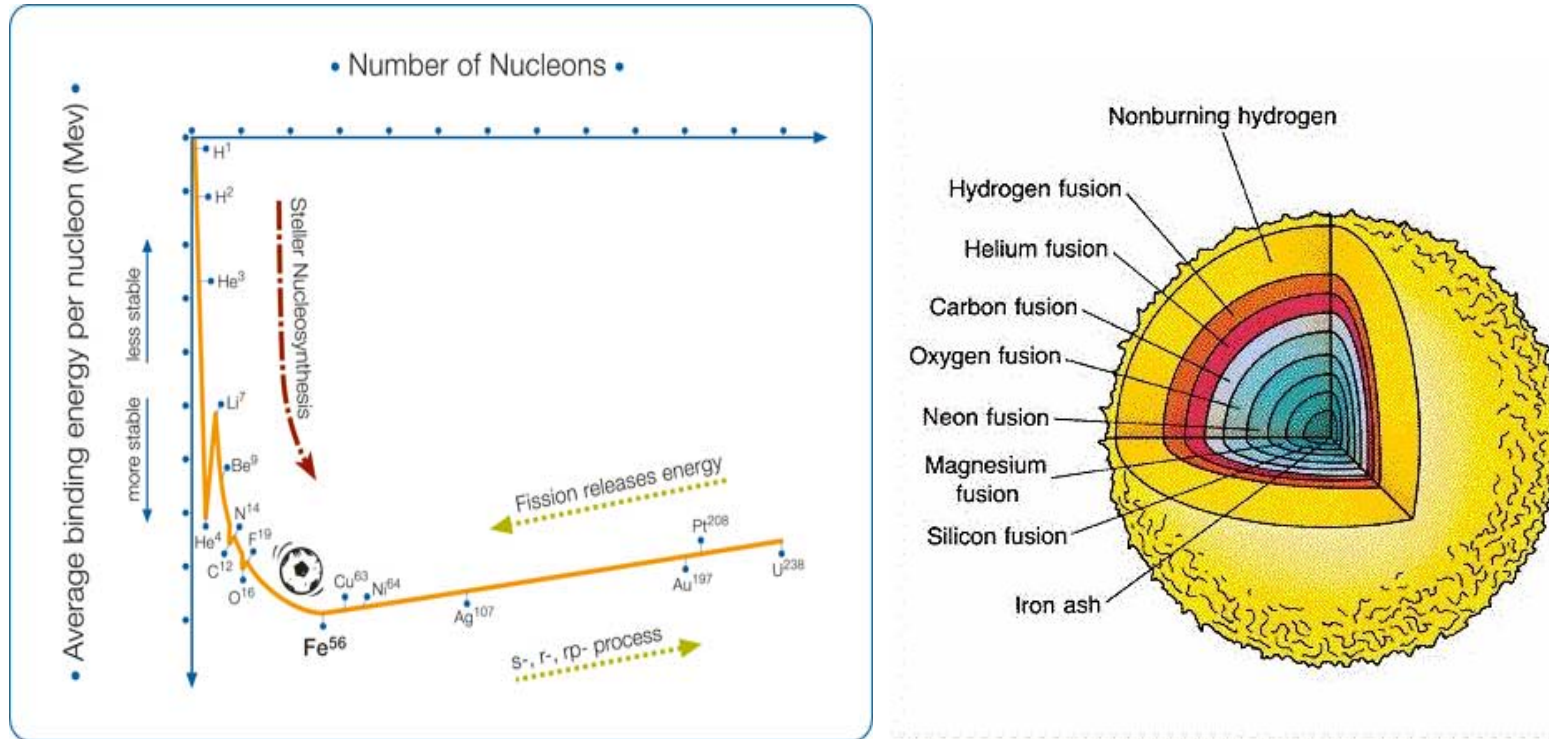


Figura 1: *Una volta terminato il 'carburante', la parte centrale delle stelle con grande massa collassa sotto il suo peso. Questo porta alla formazione di stelle compatte, come stelle di neutroni o buchi neri. L'energia in eccesso viene irradiata in neutrini, come osservato per la prima volta nel 1987.*

## Antineutrini dalla radioattività terrestre

I decadimenti di  $^{232}\text{Th}$  e  $^{238}\text{U}$  danno origine ad antineutrini osservabili.

Il primo tipo è 4 volte più abbondante; però gli antineutrini della seconda hanno più energia, allora i tassi di reazione sono simili.

\*\*\*\*\*

*Un primo indizio è stato ottenuto in Giappone nel 2005, 2008, in condizioni sfavorevoli anche per effetto dei reattori nucleari.*

*Dal 2009, le prime osservazioni ‘pulite’ sono state ottenute da Borexino al Gran Sasso, che sta consolidando la nostra conoscenza di base dei geo-neutrini.*

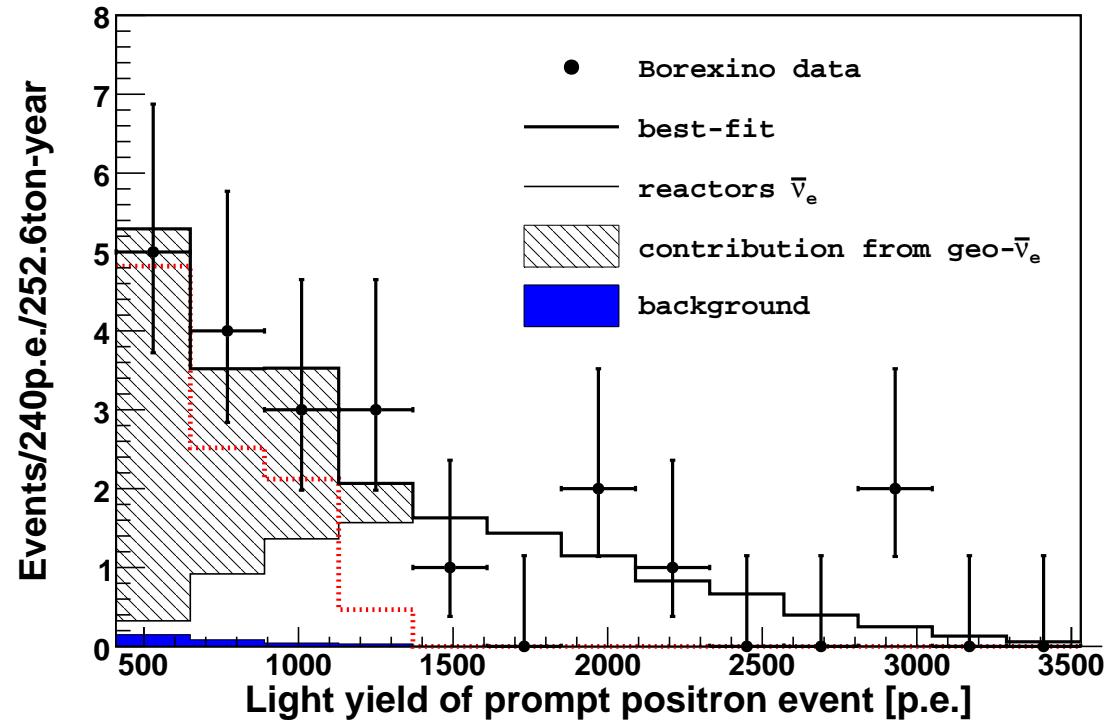


Figura 2: *Il segnale è dovuto in simili proporzioni a reattori lontani e radioattività terrestre; la seconda componente domina alle basse energie.*

Con dati futuri, si dovrebbero distinguere  $^{232}\text{Th}$  e  $^{238}\text{U}$ .

# IL PROBLEMA DEI NEUTRINI SOLARI

Sin dall'inizio risultava che i neutrini solari osservati sono  $1/3$  dei previsti.

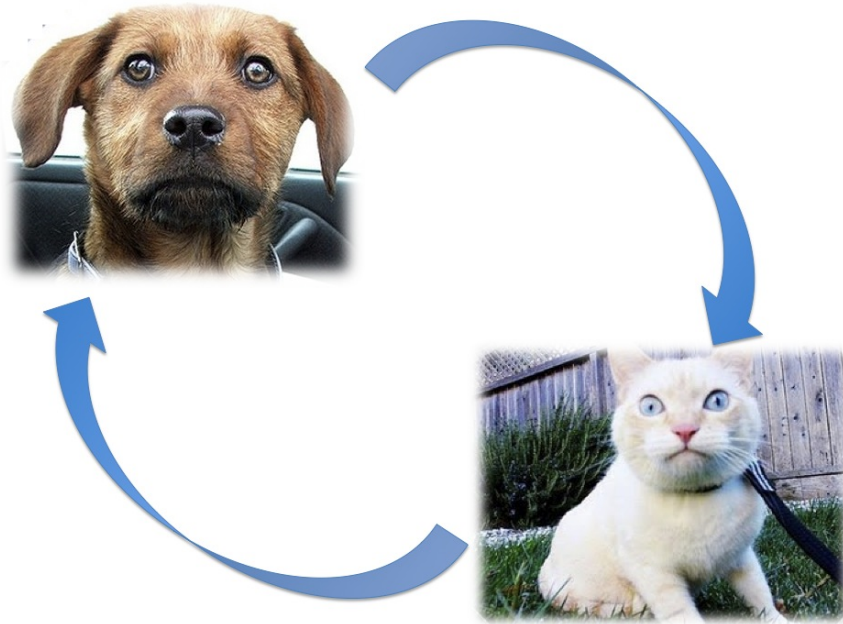
C'erano varie attitudini verso questo risultato

- 1. Non mi interessa; non è fisica fondamentale, nè astronomia moderna.*
- 2. I modelli solari sono sbagliati.*
- 3. Le misure sono sbagliate.*
- 4. La fisica delle particelle è sbagliata.*

Molto interessante è che la linea di pensiero che riteniamo corretta, l'ultima, era quella meno frequentata.

**Bruno Pontecorvo** ne era stato il fondatore. Egli aveva suggerito che i neutrini elettronici, prodotti al centro del Sole, potessero trasformarsi in neutrini di altro tipo (1957-1969).

È possibile descrivere il fenomeno delle oscillazioni usando una analogia?



Strettamente parlando, non c'è speranza, le oscillazioni sono un processo strettamente quantistica ben lontano dalle esperienze della vita quotidiana.

Un modo per intuirlo è di riflettere sul fatto che le particelle sono anche onde.

Altre analogie colorite, sono quelle con cose abbastanza poco plausibili, come i fantasmi che passano attraverso i muri oppure i fenomeni di bilocazione – ma in fisica atomica e nucleare, succede davvero.

## La soluzione del mistero dei neutrini solari

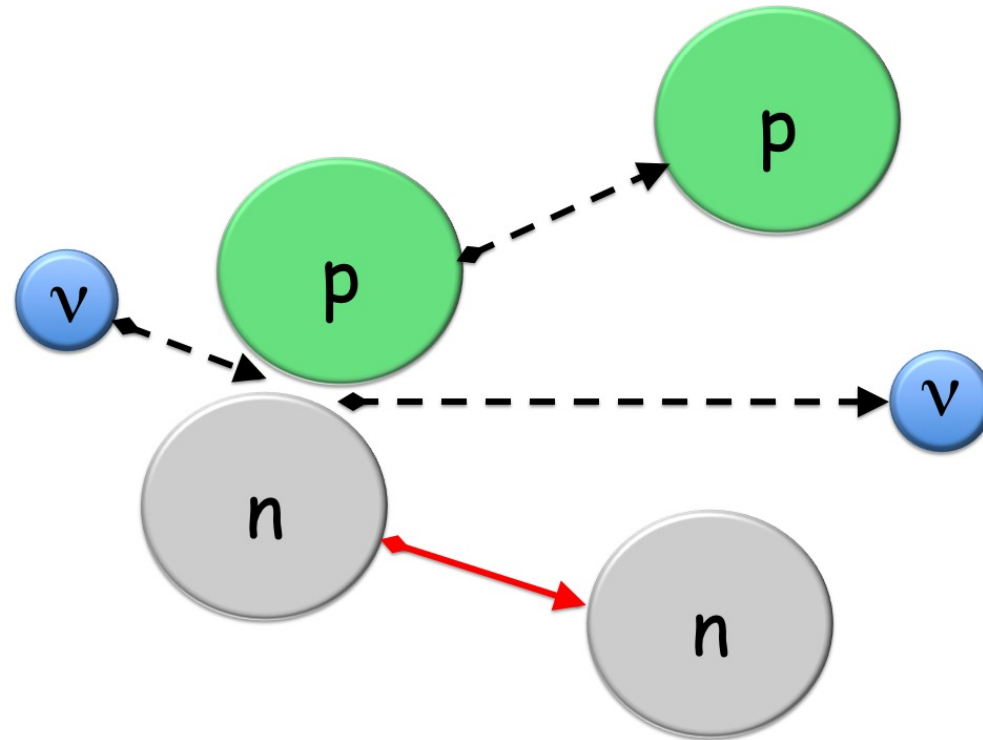
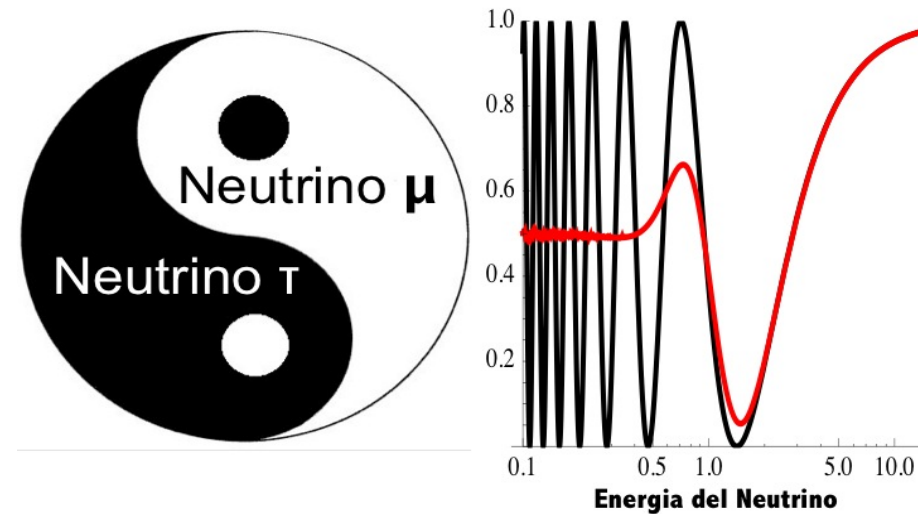


Figura 3: *La reazione di dissociazione del deuterio, insensibile al tipo di neutrino, ha permesso al rivelatore canadese SNO di validare il modello solare e concludere che i neutrini elettronici non scompaiono, ma si trasformano nei tre tipi.*



# LA VELOCITÀ DEI NEUTRINI

La motivazione originaria degli esperimenti che coinvolgono CERN e Gran Sasso è proprio una ulteriore verifica in laboratorio delle oscillazioni.



Tali verifiche sono ancora in corso, ci sono i primi risultati positivi. Nel frattempo, alcuni ricercatori che partecipano a uno dei due esperimenti, OPERA, ha approfittato dei dati disponibili per misurare **la velocità dei neutrini**, ed il risultato ha sorpreso tutti.

A parte le difficoltà tecniche si sono limitati ad applicare la nota definizione

$$\text{velocità} = \frac{\text{spazio}}{\text{tempo}}$$

Ritenendo di avere misurato correttamente e precisamente le distanze ed i tempi di volo dei neutrini, hanno dedotto che

la velocità dei neutrini supera  
quella della luce, di poco più  
di 2 parti su 100.000.

Non era proprio quello che ci aspettavamo!

Infatti i neutrini hanno una massa trascurabile, e per questo sono assimilabili ai fotoni. Ci aspetteremmo una velocità molto vicina (appena sotto) a  $c$ .



NATURE | NEWS FEATURE

## 365 days: *Nature's* 10

Ten people who mattered this year.

21 December 2011



### Dario Autiero: Relativity challenger

*The shy experimentalist whose team claims to have found faster-than-light neutrinos is happy for the work to stand or fall.*

By Nicola Nosengo

Dario Autiero can hardly keep track of his e-mails any more: hundreds keep pouring in from the media and his fellow physicists across the globe. "But the real problem is science amateurs," says Autiero, who works at the Institute of Nuclear Physics in Lyons, France. "They send e-mail upon e-mail saying that they had predicted it all."

Autiero has been at the centre of this media storm, scientific scepticism and amateur theorizing since 23 September, when he and his colleagues at the international Oscillation Project with Emulsion-Tracking Apparatus (OPERA) experiment announced results that seemed to remove a cornerstone of modern physics. At a seminar at CERN, the particle-physics laboratory near Geneva, Switzerland, and in a paper posted on the arXiv.org website (<http://lanl.arxiv.org/abs/1109.4897>), the OPERA team described how neutrinos — fundamental particles with no electrical charge and very low mass — seemed to make the 730-kilometre journey from



M. TREZZINI/EPA/CORBIS

Ora come sapete, è cronaca di questi giorni che

1) I colleghi di OPERA hanno identificato un errore di misura che non conoscevano, e che rimette in discussione la correttezza dei loro risultati.

2) I membri dell'altro esperimento, ICARUS (che include Nicola Canci, chiedetegli se volete) hanno descritto risultati in disaccordo con OPERA.

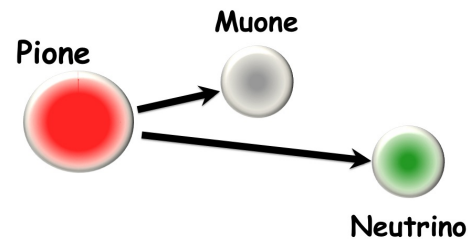
Per me, questo è abbastanza per rendere l'argomento poco interessante dal punto di vista scientifico. E faccio presente per dovere di cronaca che nessuno di questi lavori scientifici è ancora stato pubblicato, ovvero, messo agli atti. Penso che stiamo pagando un caro tributo alla velocità—o forse alla fretta.

*Ma per capire come funziona la discussione, cioè come hanno ragionato i fisici teorici, vorrei provare a portare avanti l'argomento.*

# COME SI FA A SPEDIR NEUTRINI?

*Serve qualche trucco per produrli ed indirizzarli al destinatario.*

1. Un fascio di protoni di altissima energia collide con un bersaglio.
2. Le collisioni nucleari producono particelle instabili, come i **pioni**, che decadono in volo (in un tunnel) producendo neutrini.
3. I neutrini sono lanciati nella direzione originaria dei protoni.



*Possiamo pensare ad un missile a più stadi che lancia la navicella, cioè il neutrino; oppure pensate ad una moderna versione dell'esperimento di Marconi, dove invece delle onde radio, si usano neutrini.*







# COME FUNZIONA IL TUNNEL

## Proviamo a mettere giù qualche numero

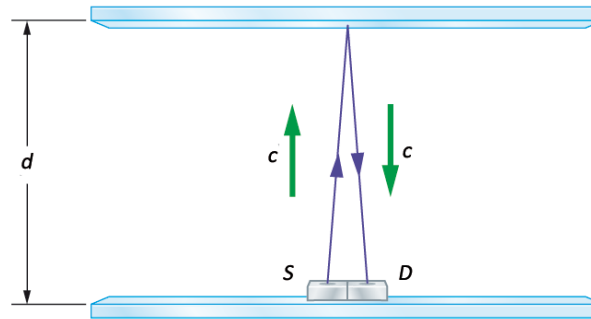
- Un pione vive in media solo un tempo di  $t = 25$  nanosecondi.
- Nelle condizioni di questo esperimento, i pioni viaggiano quasi alla velocità della luce,  $c$ .
- Ingenuamente, si potrebbe credere che viaggino al massimo qualche decina di metri prima di decadere

$$c \times t = (3 \times 10^8 \text{ m/sec}) \times (2,5 \times 10^{-8} \text{ sec}) = 7,5 \text{ metri}$$

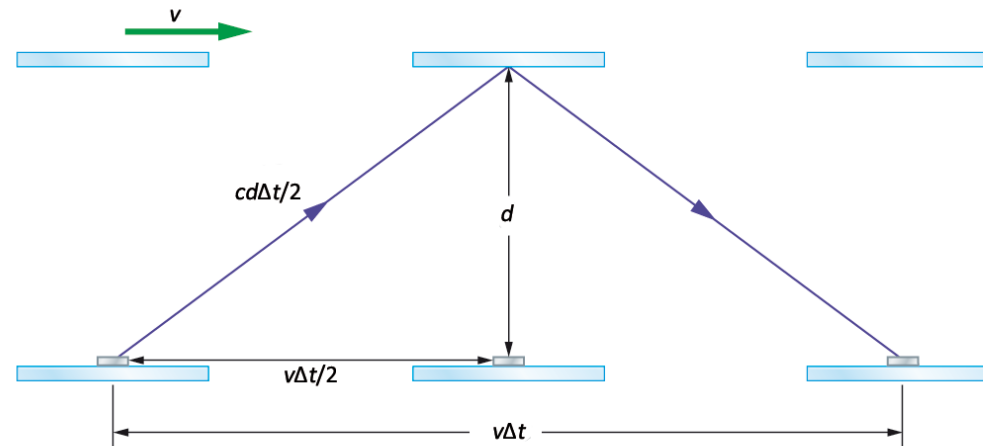
*QUIZ: allora perchè hanno dovuto scavare un tunnel di decadimento dei pioni di circa un kilometro?*



Con 2 specchi alla distanza  $d$ , costruiamo un “orologio a luce” che scandisce il tempo ogni  $\Delta t = 2d/c$  secondi:



Quando l’orologio si muove con velocità  $v$ ,  $\Delta t$  cresce di  $1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$



proprio perchè la velocità della luce è una costante.

### *Risposta al QUIZ*

Partendo dal fatto che la velocità della luce è una costante, concludiamo che la vita del pione in moto si allunga di un fattore  $1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ , che è più di 100 nel nostro caso.

Pertanto, hanno dovuto fare un tunnel abbastanza lungo per dargli tempo di decadere – invece di schiantarsi contro una parete.

Si può dire che la progettazione del fascio di neutrini dal CERN è basata sulla ipotesi che le idee di Einstein siano corrette.

# CONSIDERAZIONI DEI MESI SCORSI

## Un dubbio

Abbiamo detto che i pioni si conformano alle previsioni da Einstein. Ma se l'energia dei neutrini **non rispetta** le previsioni di Einstein, anche le nostre aspettative su come si comporta il pione, quando emette neutrini, subiranno dei contraccolpi. Sono effetti grandi o piccoli?

I calcoli che abbiamo effettuato presso il gruppo teorico del Gran Sasso dicono che questi effetti, in tutti i casi che sono stati proposti per tener conto dei risultati di OPERA, *sono troppo grandi*.

Abbiamo pubblicato quei calcoli proprio sulla stessa rivista scelta da OPERA, per cercare il massimo del confronto con i nostri colleghi.



RECEIVED: December 13, 2011

ACCEPTED: December 31, 2011

PUBLISHED: January 25, 2012

## Non-standard neutrino propagation and pion decay

---

**Massimo Mannarelli,<sup>a</sup> Manimala Mitra,<sup>a</sup> Francesco L. Villante<sup>a,b</sup>  
and Francesco Vissani<sup>a</sup>**

<sup>a</sup>*INFN — Laboratori Nazionali del Gran Sasso,  
Assergi (AQ), L'Aquila, Italy*

<sup>b</sup>*Università dell'Aquila, Dipartimento di Fisica,  
L'Aquila, Italy*

*E-mail:* [massimo@lngs.infn.it](mailto:massimo@lngs.infn.it), [manimala.mitra@lngs.infn.it](mailto:manimala.mitra@lngs.infn.it),  
[francesco.villante@lngs.infn.it](mailto:francesco.villante@lngs.infn.it), [francesco.vissani@lngs.infn.it](mailto:francesco.vissani@lngs.infn.it)

**ABSTRACT:** Motivated by the findings of the OPERA experiment, we discuss the hypothesis that neutrino propagation does not obey Einstein special relativity. Under a minimal set

JHEP01(2012)1



## Un altro dubbio

Quando, nel 1987, fu vista una **supernova** a 170 mila anni luce da noi, gli astronomi misero in allarme i cacciatori di neutrini. Chiesero di controllare se, *qualche ora prima*, ne fosse stato catturato qualcuno. Pensavano infatti che la luce fosse rallentata mentre attraversava il mantello della stella; ma che poi, nel vuoto, luce e neutrini viaggiassero alla stessa velocità. E come si usa dire, il resto è storia (premio Nobel 2002).



*Ma se i neutrini fossero più veloci, avrebbero dovuto anticipare di*

$$(2.5 \times 10^{-5}) \times (1.7 \times 10^5) = 4 \text{ anni}$$

*e non di poche ore. Che significa allora l'accordo osservato?*

Nei mesi scorsi, ho anche sentito parlare di scorciatoie nello spazio tempo, neutrini extradimensionali, relatività deformata, interazioni esotiche con la materia. Forse non capisco abbastanza per apprezzare questi concetti, forse sono pessimista, ma non dividevo l'esigenza di parlarne.

# PRO



# CON



e vari altri di cui non si trovano  
le foto sul web: Gonzalez-Mestres,  
Strumia, Bi, ecc ecc

*NB 1) Le pubblicazioni su rivista sono venute soprattutto dalla colonna di destra. 2) Alcune posizioni sono cambiate negli ultimi giorni. 3) Sarebbe importante tornare alle origini della discussione, anche se questo discorso è lungo che magari interessa solo i fisici teorici.*

# DISCUSSIONE

- ★ Gli studi della luce hanno permesso, oltre ai grandi progressi tecnologici di cui siamo testimoni, di capire il legame inestricabile tra spazio e tempo alla base della relatività di Einstein.
- ★ Questa teoria è alla base di tutta la fisica moderna, e principalmente della fisica nucleare e di quella delle particelle,
- ★ Le tesi sconvolgenti sulla velocità dei neutrini hanno messo in moto altri esperimenti ed hanno generato una discussione molto ampia.
- ★ Nel frattempo, i teorici si sono messi al lavoro su quei risultati. Vari di loro si sono espressi contro, e se davvero il caso rientrerà come sembra che stia accadendo in molti tireremo un sospiro di sollievo.
- ★ Gli studi del neutrino mantengono un grande interesse, ed anzi non nascondo la mia opinione, che sarebbe ora di tornare a parlare delle molte cose interessanti relative a queste particelle, anche se meno eclatanti. Ma lasciatemi concludere con un tono più scherzoso...



A noi iscritti a fisica nell'anno 1983/84, non è andata poi così male.

Più di un terzo di noi si ritrova a lavorare nell'università, in istituti di ricerca di fisica, di ingegneria, di economia... altri insegnano nelle scuole, chi preside, chi direttore, ecc.

Io lo trovo un mestiere bellissimo e mi sentirei addirittura di suggerire, a quelli di voi che si sentono motivati, di pensare di iscriversi a questa facoltà.

Perchè se anche non si trovasse il modo di assurgere agli onori della cronaca, si potrà sempre ripiegare su una onesta carriera di astronauta :)

*Grazie per l'attenzione!*



# PER I PIÙ CURIOSI

## Effetto Doppler e cosmologia

L'effetto Doppler ha innumerevoli applicazioni (dalla medicina all'astrofisica).

Una delle più emozionanti è la misura delle distanze in cosmologia: I corpi più lontani hanno degli spettri di emissione spostati verso il rosso (*red-shift*) e questo viene interpretato come un effetto di allontanamento cosmologico secondo la legge di Hubble

$$v = H_0 \cdot d$$

La costante  $H_0$  vale 70 km/sec/Mpc. Misurando la velocità  $v$  tramite l'effetto Doppler, si deduce la distanza dell'oggetto.

Per moti molto veloci, l'espressione mostrata deve essere un po' modificata.



## Prova della relazione $E = p \cdot c$

Un modo veloce per vederlo è considerare le relazioni per i quanti di luce proprie della meccanica quantistica:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Energia} = h \cdot \nu \quad [\text{Pauli}] \\ \text{Impulso} = \frac{h}{\lambda} \quad [\text{De Broglie}] \end{array} \right.$$

Il rapporto tra le due è  $\lambda \nu$  cioè la lunghezza d'onda per la frequenza, che è l'inverso del periodo,  $\nu = 1/T$ . Allora, la relazione desiderata equivale alla nota relazione

$$\lambda/T = c$$

che ricordiamo così: la velocità della luce è il rapporto tra la lunghezza d'onda ed il periodo di una oscillazione.

$$\text{P.S.: } \sin \left[ 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \right] = \sin \left[ \frac{(h\nu \cdot t - h/\lambda \cdot x)}{h/(2\pi)} \right] = \sin \left[ \frac{(Et - px)}{h/(2\pi)} \right]$$

Un esercizio interessante su questo è di capire la **pressione di radiazione**.

Ad esempio, il Sole irradia una potenza di circa  $\mathcal{P} = 1.5 \text{ kWatt/m}^2$  (cioè, 1500 Joule al secondo ogni metro quadro). La forza esercitata da un fotone assorbito è

$$F = \frac{dp}{dt} = \frac{1}{c} \frac{dE}{dt}$$

Quindi la forza esercitata da molti fotoni è proprio la somma delle singole forze; la pressione complessiva è semplicemente  $\mathcal{P}/c$ .

**ESERCIZIO:** Stimare a quale peso sul nostro corpo equivale la pressione del Sole (per es., quando siamo in spiaggia ad abbronzarci) e provare a progettare una ‘vela solare’ per voli ecologici nello spazio.

## La relazione generale tra energia, impulso e velocità

Proviamo la seguente relazione tra queste tre quantità

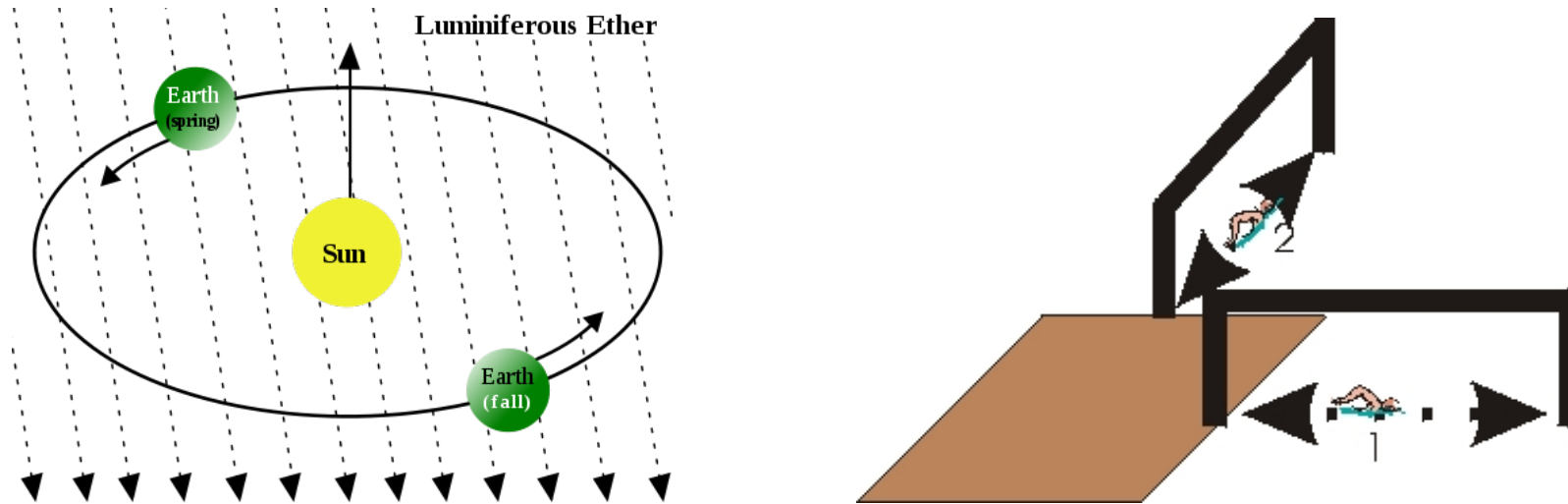
$$v = \frac{dE}{dp}$$

detta anche di Hamilton-Jacobi. È facile verificare che vale sia per la luce che per le particelle lente, ma infatti, è molto più generale.

Per vederlo, consideriamo un corpo che aumenta la sua energia  $E$  di una piccola quantità  $dE$ , a causa di una forza  $F$  che agisce per una breve distanza  $dx$ ; siccome la forza è la derivata dell'impulso nel tempo, vale

$$dE = F dx = \frac{dp}{dt} dx = \frac{dx}{dt} dp = v dp$$

Si arriva alla relazione desiderata, dividendo il primo ed ultimo membro per l'incremento di impulso  $dp$ . (In un certo senso, abbiamo seguito questo approccio: descriviamo come cambia l'energia del corpo usando l'impulso  $p$ , che è funzione del tempo, invece di usare la coordinata  $x$  come si fa di solito.)



Consideriamo il nuotatore che si muove con velocità  $c$  e la corrente con velocità  $v < c$ . Nuotando prima a favore di corrente, poi contro, in un tratto di lunghezza  $D$  vale

$$\text{tempo} = \frac{D}{c - v} + \frac{D}{c + v} = \frac{2D/c}{1 - v^2/c^2}$$

Nuotando trasversalmente si impiega il doppio di  $t$ , dato da  $(ct)^2 = (vt)^2 + D^2$  cioè

$$\text{tempo} = \frac{2D/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Il secondo tempo è minore del primo, del fattore  $\sqrt{1 - v^2/c^2} < 1$ .

## Le trasformazioni dello spazio

Conviene procedere per analogia. Consideriamo le rotazioni intorno all'origine come trasformazioni dello spazio. Esse lasciano invariata le distanze dall'origine:

$$x^2 + y^2 = x'^2 + y'^2$$

e sono descritte

$$\begin{cases} x' = +\cos \theta x + \sin \theta y \\ y' = -\sin \theta x + \cos \theta y \end{cases}$$

dove  $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$  descrive un cerchio.

Secondo Einstein qualcosa di simile avviene per le trasformazioni che mettono in gioco lo spazio ed il tempo.

## Le trasformazioni dello spazio-tempo

Se richiediamo che l'equazione che descrive la propagazione di un raggio di luce lungo l'asse delle  $x$

$$(ct)^2 - x^2 = (ct')^2 - x'^2 = 0$$

non cambi, e le trasformazioni siano lineari, concludiamo che

$$\begin{cases} x' &= + \cosh \eta x + \sinh \eta ct \\ ct' &= + \sinh \eta x + \cosh \eta ct \end{cases}$$

dove  $\cosh^2 \eta - \sinh^2 \eta = 1$  descrive un'iperbole.

Perchè le trasformazioni sopra siano proprio quelle trovate da Lorentz

$$\begin{cases} x' &= \frac{x + v/c(ct)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ ct' &= \frac{v/cx + ct}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \end{cases}$$

basta identificare  $v = c \cdot \tanh \eta$ .

## La velocità della luce come fattore di conversione

Il tempo appare sempre come

$ct$ , cioè, come una distanza

Lo spazio ed il tempo risultano inestricabilmente legati.

*Se ci chiedono “quando ci vediamo?” e noi rispondiamo “fra un miliardo di chilometri” invece di “fra poco meno di un ora” Einstein approverebbe.*

## Le trasformazioni di Lorentz

Lorentz trovò delle trasformazioni che lasciavano invariata la velocità della luce in ogni sistema di riferimento in moto uniforme

$$\begin{cases} x' = \gamma(x + vt) \\ t' = \gamma(t + vx/c^2) \end{cases}$$

per trovare le quali si può partire da considerazione elementari.

Esse devono avere le giuste dimensioni, essere più semplici possibile, riprodurre le precedenti nel limite formale in cui la velocità della luce sia infinita; poi si fissa la funzione  $\gamma(v^2)$  richiedendo che le trasformazioni nel sistema in moto con velocità opposta siano quelle attese, e si trova  $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ .

Ma non arrivò a capirne il significato, che va oltre le equazioni di Maxwell.



## Esiste un modo per avere neutrini superluminali?

- ★ C'è chi dice di sì, ma in molti pensano che l'effetto di OPERA sia *troppo* grande.
- ★ Le interpretazioni che ci sono al momento sono lacunose e non troppo convincenti.
- ★ E come avete sentito, i colleghi di OPERA sostengono di avere trovato un errore.

È buffo ricordare che quando emerse qualche indizio che il vento d'etere esistesse, il commento di Einstein fu *il Signore è sottile, ma non malizioso*.